МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Маріупольський державний університет

Мартинюк Г.В.
Марченко Н.Б.
Щербак Л.М.

Курс лекцій з дисципліни "Методи оптимізації та дослідження операцій"

Київ 2024

УДК 004

Укладачі: Г.В. Мартинюк, Н.Б. Марченко, Л.М. Щербак
Рецензенти: Ю.В. Куц, О.В. Монченко

Мартинюк Г.В., Марченко Н.Б., Щербак Л.М. Курс лекцій з дисципліни Методи оптимізації та дослідження операцій. – К.: МДУ, 2024.–48 с.

В рекомендаціях до курсу лекцій та самостійної роботи розглянуто загальні поняття про методи оптимізації, математичне програмування, предмет математичного програмування, його значення в розв'язанні задач оптимізації, поняття математичної моделі та вимоги до неї. Викладено основні відомості про основні задачі оптимізації, способи подання оптимізаційної задачі, наведено приклади оптимізаційної задачі, розглянуто загальну задачу математичного програмування, її класифікацію. Розглянуто основні відомості про типові задачі математичного програмування, лінійне програмування, її математичну постановку, загальну задачу лінійного програмування, наведено приклади та властивості розв'язків, графічний спосіб розв'язування задач лінійного програмування, геометричну інтерпретацію задач лінійного програмування. Описано симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування, поняття про симплексний метод та основну форму, наведено основні характеристики симплексного – методу.

Призначений для студентів вищих навчальних закладів, забезпечує підготовку фахівців за спеціальністю **123 «Комп'ютерна інженерія», 122 «Комп'ютерні науки», 124 «Системний аналіз», 126 «Інформаційні системи та технології»** галузі знань **12 Інформаційні технології** за ступенем вищої освіти бакалавр.

Рекомендовано до друку
засіданням ради з якості вищої освіти
Економіко-правового факультету
Маріупольського державного університету,
протокол № 7 від 20 березня 2024 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

Методи оптимізації та дослідження операцій, які включають в себе методи математичного моделювання, математичного програмування та оптимізації, лінійного програмування, складають фундамент прикладної математичної підготовки фахівців за спеціальністю 123 «Комп'ютерна інженерія», 122 «Комп'ютерні науки», 124 «Системний аналіз», 126 «Інформаційні системи та технології» галузі знань 12 Інформаційні технології за ступенем вищої освіти бакалавр.

В рекомендаціях до лекційних занять та самостійної роботи з дисципліни «Методи оптимізації та дослідження операцій» викладено основні положення теорії детермінованого лінійного та нелінійного програмування; методів чисельного пошуку екстремумів опуклих функцій на опуклих множинах, методів параметричного та цілочисельного програмування, розглянуто загальні поняття про математичне програмування, предмет математичного програмування, його значення в розв'язанні задач оптимізації, поняття математичної моделі та вимоги до неї. Представлено основні відомості про основні задачі оптимізації, способи подання оптимізаційної задачі, наведено приклади оптимізаційної задачі, розглянуто загальну задачу математичного програмування, її класифікацію. Розглянуто основні відомості про типові задачі математичного програмування, лінійне програмування, її математичну постановку, загальну задачу лінійного програмування (ЗЛП), наведено приклади задач лінійного програмування та властивості розв'язків задач лінійного програмування, графічний спосіб розв'язування задач лінійного програмування, геометричну інтерпретацію задач лінійного програмування. Описано симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування, поняття про симплексний метод та його основну форму, наведено основні характеристики симплексного методу.

Вивчення наведеного у курсі лекцій матеріалу призводить до формування фундаментальних теоретичних знань з математичного моделювання, оптимізації та дослідження операцій, які використовуються при дослідженні операцій, а також важливих прикладних практичних навиків із застосування програмування та моделювання для побудови комп'ютерних математичних моделей та кількісного розв'язання оптимізаційних задач як при імітаційному моделювання, на попередніх етапах проектування систем, пристроїв та засобів комунікацій, так і в реальному часі.

Курс лекцій містить значну кількість прикладів та запитань для самостійного вивчення матеріалу та може бути використаний: для вивчення курсу «Математичні методи системного аналізу»; курсового проектування, курсових та кваліфікаційних робіт.

Тема 1. Загальні поняття про математичне програмування, методи оптимізації та дослідження операцій

1.1. Вступ до курсу лекцій «Методи оптимізації та дослідження операцій»

В повсякденному житті ми часто маємо справу з проблемами дослідження процесів на найкращий чи найгірший, найменший чи найбільший, найдорожчий чи найдешевший тощо. З такими процесами ми зустрічаємось у різних сферах людської діяльності від побутового та особистісного рівня (планування бюджету сім'ї, розподілу зарплати та ін.) до завдань загальнодержавного рівня. Задачі такого характеру називають задачами оптимізації.

Їх розв'язування, як проблем удосконалення міжгалузевих відносин на сучасному етапі розвитку, тісно пов'язане з використанням передових наукових технологій, серед яких важливе місце займають математичні методи, математичне програмування, алгоритмізація розв'язку таких задач та їх розв'язування з застосуванням інформаційних комп'ютерних технологій.

Метою вивчення предмету «Методи оптимізації та дослідження операцій» є оволодіння здобувачами знаннями, уміннями та навичками розв'язування задач оптимізації, дослідження функції на максимальні (наприклад, прибуток) та мінімальні (витрати матеріалу та інших ресурсів) значення тощо у широкому спектрі теоретико-економічних та практичних проблем на всіх рівнях ієрархії управління виробничими, технічними та соціально-економічними процесами.

Курс лекцій дозволяє здобувачам вивчити:

– постановки задач математичного програмування, критерії та методи технічної, математичної та економічної оптимізації складних систем;

– чисельні методи в задачах лінійного та нелінійного програмування та формувати прикладні практичні навички фізичної інтерпретації результатів обчислювальних експериментів та їх візуалізації;

–термінологію, визначення, основні поняття, символьне позначення основних операцій та їх зміст, що використовуються в детермінованих умовах;

– інформаційні технології розв'язання класичних задач лінійного, нелінійного, дискретного (у тому числі і цілочисельного), програмування та дослідження операцій;

– прийоми формалізації задач структурно-функціонального аналізу, загальної стратегії їх розв'язання та системної оптимізації складних конструктивних елементів;

– підвищити рівень професійної підготовки майбутніх фахівців за рахунок сучасних досягнень в галузі прикладної математики, зокрема математичного програмування, дослідження операцій.

Прикладом використання знань з методів оптимізації та дослідження операцій на практиці може бути розв’язання таких виробничих задач:

- ✓ отримання *максимального прибутку* або випуску *максимального об’єму* продукції при заданих матеріальних, трудових, енергетичних або часових витратах;
- ✓ забезпечення планових показників підприємства при *мінімальному розмірі фінансових затрат*;
- ✓ досягнення *максимально короткого терміну* виготовлення продукції, будівництва об'єкту, товарообігу, виробничого циклу і тому подібного при існуючих або заданих виробничих ресурсах;
- ✓ вибір параметрів об’єкту або процесу, при яких забезпечується його максимальна корисність.

В наведених прикладах *максимальний випуск* продукції, *максимальний прибуток*, *мінімальний розмір фінансових вкладень*, *максимально короткий термін, максимальна корисність* - це є шукані *оптимуми* (*максимуми* або *мінімуми*), тобто результати, які при заданих умовах задачі неможливо перевершити.

В свою чергу, умови, які накладаються на можливі розв’язки задач (*задані матеріальні, трудові і часові витрати; виробничі ресурси; можливі діапазони значень параметрів або планових показників)*, називають *обмеженнями* задачі.

Оптимальне рішення задачі – це розв’язок, що обов’язково задовольняє обмеженням задачі.

В суто математичному аспекті деякі оптимізаційні задачі були відомі ще в стародавній Греції. Початком його розвитку як самостійного наукового напрямку слід вважати перші спроби застосування методів математичного програмування в прикладних дослідженнях. Задачі лінійного програмування були першими, докладно розглянутими задачами пошуку екстремума функцій при наявності обмежень типу нерівностей. В 1820 р. Ж. Фур'є і потім в 1947 р. Дж. Данціг запропонував метод направленого перебору суміжних вершин у напрямку зростання цільової функції - симплекс-метод, що став основним при розв'язанні задач лінійного програмування.

Справжнім початком математичного програмування в сучасному розумінні вважають праці лауреата нобелівської премії (1975 р.) вченого Л. В. Канторовича, що сформулював ряд задач лінійного програмування й запропонував (1939 р.) метод їхнього розв'язання (метод розв'язних множників), що має відмінності від симплекс-методу. Термін «лінійне програмування» був введений дещо пізніше, 1951 року, у працях американських вчених Дж. Данцига та Г. Кумпанса.

Наступним кроком стали праці Дж. Неймана (1947 р.) щодо розвитку концепції двоїстості, що дало можливість розширення практичної сфери застосування методів лінійного програмування.

Л. В. Канторовичем разом із М. К. Гавуриним в 1949 р. розроблено метод потенціалів, що застосовується при розв'язанні транспортних задач. Періодом найінтенсивнішого розвитку математичного програмування та методів оптимізації є п'ятдесяті роки.

На сучасному етапі оптимізаційні задачі, дослідження операцій та математичне програмування включають широке коло задач з відповідними методами розв'язання, що охоплюють різноманітні проблеми розвитку та функціонування реальних систем.

1.2. Предмет математичного програмування, його значення в розв'язанні задач оптимізації

Науковий напрямок Математичне програмування асоціюється передусім з програмуванням, як процесом створення програм для ПК за допомогою певної мови програмування. Проте, насправді, це лише не дуже вдалий переклад англійського терміну *mathematical programming,* що означає розроблення на основі математичних розрахунків програми дій для досягнення обраної мети. В економічних, виробничих, технологічних, транспортних процесах різних галузей народного господарства виникають задачі, подібні за постановкою, що мають ряд спільних ознак та розв'язуються подібними методами. *Типова постановка задачі* математичного програмування така: деякий процес може розвиватися за різними варіантами, кожен з яких має свої переваги та недоліки, причому, як правило, таких варіантів може бути безліч. Необхідно із усіх можливих варіантів вибрати найкращий по відношенню до поставленої задачі. З цією метою використовуються математичні методи та методи оптимізації.

Реальні економічні задачі є достатньо складними та багатогранними, в яких, наприклад, кількість ресурсів та видів продукції може сягати сотень найменувань, і тоді простий перебір всієї множини варіантів абсолютно неможливий. Отже, постає необхідність створення спеціальних математичних методів розв'язання таких задач (чіткого алгоритму дій), тобто математичного обґрунтування найефективніших виробничих програм. Саме зі словом «програма» і пов'язана назва напрямку — «математичне програмування».

Пошук реального оптимального плану є, як правило, складним завданням і належить до екстремальних задач, в яких необхідно визначити максимум чи мінімум (екстремум) функції за визначених обмежень.

Математичне програмування — один із напрямків прикладної математики, *предметом* якого є задачі на знаходження екстремуму деякої функції за певних заданих умов.

Об'єктами математичного програмування є різноманітні галузі людської діяльності, де в певних ситуаціях необхідно здійснити вибір найкращого з можливих варіантів дій. Основою такого вибору є знаходження розв'язку екстремальної задачі методами математичного програмування.

Математична модель системи — це його спрощений образ, поданий у вигляді сукупності математичних співвідношень (рівнянь, нерівностей, логічних співвідношень, графіків тощо).

1.3. Поняття математичної моделі та вимоги до неї

Терміни “модель”, “моделювання” ми часто використовуємо в повсякденному житті, вкладаючи подекуди в них зовсім різноманітні поняття. При розгляді моделювання, як універсального методу наукового пізнання доцільно ввести наступне означення моделі.

Модель – це матеріальна або розумово-уявна система чи фізичний об’єкт, яка в процесі дослідження замінює об’єкт-оригінал так, що його безпосереднє вивчення дає нові знання про цей об’єкт.

Під *моделюванням* розуміють процес формалізації фізичного об’єкта метою якого є створення певного його аналога – моделі, що адекватна об’єктові. Моделювання – це триєдиний процес побудови, вивчення та застосування моделей.

Всі моделі можуть бути умовно поділені на декілька видів.

І) Фізичні моделі є об’єктами, що існують в реальному житті і створюються з реальних матеріалів. Це дійсне відтворення реально існуючого об’єкту. Сюди відносять:

А) *Геометрично подібні* моделі (макети різних установок, приладів, будов). Вони використовуються у зменшеному масштабі для того, щоб мати просторову уяву про об’єкт, компоновку його елементів, взаємне розміщення їх в просторі.

Б) *Фізично подібні* моделі (дослідження процесів продування моделі крила літака в аеродинамічній трубі). Вони створюються для того, щоб краще зрозуміти фізичні процеси та явища, що вивчаються, їх кінетику та динаміку, виявлення найважливіших закономірностей та функціональних залежностей.

В) *Математично подібні* моделі (аналогові моделі руху рідин та газів, що описуються однаковими диференціальними рівняннями). Створені для вивчення складних процесів (наприклад, транспонування рідини чи газу) за допомогою їх простіших аналогів (електричної моделі).

ІІ) Уявні моделі існують у вигляді ідеї дослідника, на папері, магнітних носіях у вигляді певних уявних образів: формул, таблиць, знаків, схем тощо. Вони поділяються на:

А) *Образні моделі* побудовані з чуттєво – наглядних ідеальних елементів(в природі таких не існує), що використовуються для наближеного опису реальних явищ (абсолютно чорне тіло, пружні кульки, ідеальний газ і т.д.).

Б) *Знакові моделі* відзначаються повною відсутністю подібності між досліджуваним об’єктом та його моделлю. Наприклад, заміна міста-точки відправлення поїзда буквою (Задача «З міста А в місто В їде поїзд…»).

В) *Образно – знакові* є поєднанням попередніх двох видів.

Одним з підвидів знакових моделей є математичні моделі.

Математична модель фізичного об'єкта – це сукупність математичних співвідношень (рівнянь, формул, графіків), що пов’язують вихідні характеристики стану об’єкта з вхідною інформацією, геометричними, фізичними та іншими обмеженнями іншою інформацією, що накладається на функціонування об’єкту. Математична модель знаходиться у відповідності з об'єктом і здатна замінити його з метою отримання нової інформації про його поведінку.

Особливостями математичних моделей є:

- наближеність опису;
- врахування тільки основних чинників;
- компроміс між простотою та повнотою опису;
- обмеженість застосування;
- відмінність математичних моделей від закону (не абсолютність математичної моделі);
- адекватність.

Математичне моделювання – це комплексне дослідження властивостей фізичного об'єкту з допомогою створеної його математичної моделі (найчастіше з використанням ПК).

В різних сферах застосування етапи процесу моделювання мають свої специфічні риси, але в усіх випадках можна виділити декілька етапів, що присутні завжди. Визначимо одну з запропонованих на сьогоднішній день класифікацій:

1. *Постановка проблеми та її якісний аналіз*. Тут виділяють найважливіші риси, особливості та властивості модельованого об'єкту та абстрагують другорядні, вивчають структуру та взаємозв'язок елементів, формулюють основні гіпотези (хоча би попередні).

2. *Побудова математичної моделі*. Це етап формалізації проблеми, вираження її у вигляді конкретних математичних залежностей та відношень. Як правило, спочатку визначається основна конструкція задачі (тип моделі), а потім відбувається уточнення окремих деталей.

3. *Математичний аналіз моделі.* Виясняються загальні властивості моделі, доводиться теорема існування розв'язку задачі (інакше наступні дослідження не проводяться), виясняють чи єдиний розв'язок, які змінні належатимуть розв'язку та в якому співвідношенні, в яких межах та з якою тенденцією вони змінюватимуться.

4. *Підготовка вихідної інформації.* На даному етапі використовують методи теорії ймовірностей та математичної статистики.

5. *Чисельний розв'язок*. Розробляються алгоритми для розв'язування задачі, складаються програми для ПК. Завдяки швидкодії ПК можна провести багаточисленні експерименти з різними вихідними умовами та параметрами.

6. *Аналіз чисельних результатів та їх застосування*. Повністю вивчається питання про правильність та повноту результатів моделювання, адекватність моделі та її практичне застосування.

Якщо ж розглядати спрощений варіант даного алгоритму, то можна виділити три етапи: модель — алгоритм — програма (рис. 1.1).

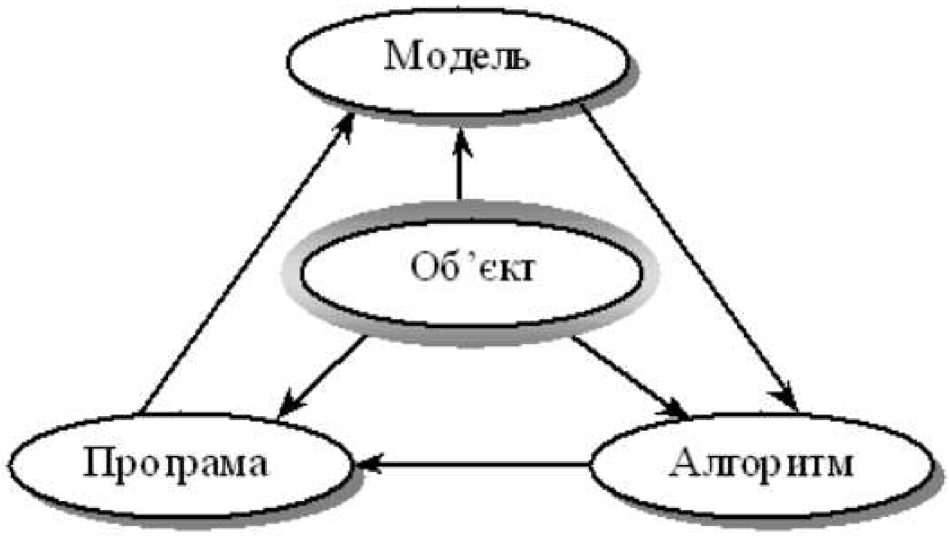


Рисунок 1.1 – Узагальнена схема математичного моделювання

На першому етапі визначається «еквівалент» об'єкта, що відтворює в математичній формі найважливіші його властивості. Математична модель досліджуються теоретичними методами, що дає змогу отримати важливі нові знання про об'єкт.

Другий етап — розробка алгоритму для реалізації моделі на ПК. Модель подається у формі, зручній для програмування, визначається послідовність обчислювальних і логічних операцій, котрі необхідно здійснити, щоб отримати шукані величини із заданою точністю.

На третьому етапі створюються програми, що перетворюють модель і алгоритм на доступну комп'ютерну мову.

Створивши схему: «модель — алгоритм — програма», дослідник отримує універсальний, гнучкий і відносно дешевий інструмент, який тестується в обчислювальних експериментах. Після того як адекватність результатів підтверджена, з моделлю проводять різноманітні «досліди», які дають нову інформацію про необхідні якісні та кількісні властивості й характеристики об'єкта.

Контрольні запитання

1. Якою є мета вивчення предмету «Методи оптимізації та дослідження операцій».
2. Навести означення математичного програмування.
3. Навести види моделей.
4. Описати математичну модель фізичного об'єкта.
5. Описати етапи процесу моделювання.

Тема 2. Основні задачі оптимізації

2.1. Способи подання оптимізаційної задачі

Завдання знаходження найбільших і найменших величин не рідко виникають у науці, техніці та економіці. Щоб застосовувати математичні методи для їх розв'язання та аналізу, необхідно вміти переходити від змістовної до математичної постановки завдання. На сьогоднішній день методи оптимізації використовуються для підвищення якості і надійності виготовленої продукції, для підвищення продуктивності обладнання на підприємствах, для мінімізації ризиків, для підвищення ефективності технологічних процесів на підприємствах, як на етапі проектування так і при керуванні. Популяризації методів оптимізації та оптимального керування сприяє те, що прикладні оптимальні задачі в більшості зводяться для вирішення типових задач оптимізації.

Для того, щоб використати математичні результати і чисельні методи теорії оптимізації для розв'язування прикладних інженерних задач, необхідно встановити межі системи, що підлягає оптимізації, визначити кількісний критерій, на основі якого можна зробити аналіз варіантів із метою виявлення оптимального, здійснити вибір змінних, що використовуються для визначення характеристик і ідентифікації варіантів, і побудувати модель, що відображає взаємозв'язки між змінними. Наведена послідовність дій складає зміст процесу постановки задачі оптимізації. Коректна постановка задачі дає можливість провести оптимізаційне дослідження.

Для правильної (коректної) постановки задачі оптимізації необхідне виконання умов: наявність одного критерію оптимальності; наявність у об'єкту оптимізації ступенів свободи; можливість кількісної оцінки величини, що оптимізується. Постановка задачі оптимізації передбачає існування конкуруючих властивостей об'єкту. Вибір компромісного розв'язку і представляє у таких випадках процедуру рішення оптимальної задачі.

Можливість існування специфічних екстремальних властивостей самого об'єкту оптимізації потрібно врахувати при розгляді конкретної оптимальної задачі

Отже, оптимізаційну задачу математичного програмування можна подати в *змістовній* (вербальній) або *формальній постановці*.

Надалі ми будемо розглядати оптимізаційна задачу в змістовній постановці

Змістовна постановка задачі – це словесний опис задачі. Розглянемо приклад оптимізаційної задачі в змістовній постановці.

2.2. Приклади оптимізаційної задачі

Приклад. Для виробництва столів і шаф підприємство використовує деревину. Для виробництва одного столу необхідно 2 м^2 деревини, однієї шафи – 4 м^2. Трудомісткість виробу складає: одного столу – 4 *чол.-год*, однієї шафи – 3 *чол-год*. Прибуток від продажу становить: одного столу – 800 *грн*, однієї шафи – 1000 *грн.* Меблева фабрика для виготовлення столів і шаф у своєму розпорядженні має 200 м^2 деревини та 600 *чол-год* фонду робочого часу. Визначити, скільки столів і шаф треба виготовити, щоб прибуток від реалізації всіх виробів був максимальним**.**

Вихідні дані задачі доцільно звести в таблицю (табл. 2.1), що є зручним та наочним при розподілі чи групуванні початкових даних, а в подальшому полегшує формування математичної моделі задачі.

Таблиця 2.1

Вид сировини	Норми витрат ресурсів на один виріб		Загальна кількість ресурсів
	Стіл	Шафа	
Деревина виду, м^2	2	4	400
Трудомісткість, *чол-год.*	4	3	600
Прибуток від реалізації одного виробу, *грн.*	**800**	**1000**	

Оптимізаційна задача в формальній постановці

Змістовна постановка задачі повинна дозволяти переходити до строгої *математичної моделі*. У протилежному випадку необхідно пройти досить трудомісткій кропіткий процеси математичного моделювання й ідентифікації, які в цьому курсі не розглядаються.

Розглянемо на прикладі 1 *поетапний процес побудови математичної моделі* задачі. Для цього використаємо наступний алгоритм:

- Визначимо невідомі задачі.
- Сформуємо цільову функцію.
- Сформуємо математичну модель задачі без урахування обмежень задачі.
- Визначимо обмеження задачі Ω, тобто область припустимих рішень.
- Сформуємо завершальну математичну модель задачі (з урахуванням обмежень).

1. Визначимо *невідомі* задачі. Як правило, у якості невідомих виступають ті величини, які треба визначити згідно з умовами задачі. В прикладі 1 такими величинами є *кількість столів* і *кількість шаф*. Позначимо ці кількості як x_1 і x_2 відповідно.

2. Сформуємо *цільову функцію* Y, тобто функцію, оптимум якої треба встановити за вимогами задачі. Цільова функція це *критерій*, за яким визначається найліпше рішення. У даному випадку критерієм є функція, що виражає прибуток від виготовлення x_1 столів та x_2 шаф. Цільова функція для даного прикладу має вигляд:

$$Y(x_1, x_2) = 800x_1 + 1000x_2. \tag{2.1}$$

Функція (2.1) визначає прибуток меблевої фабрики від реалізації всіх виробів.

3. Сформуємо математичну модель задачі без урахування обмежень задачі, так званої задачі безумовної оптимізації:

$$Y(x_1, x_2) = 800x_1 + 1000x_2 \longrightarrow \max. \tag{2.2}$$

Тут символи « $\longrightarrow max$ » вказує, що нам треба знайти не якісь значення змінних x_1 і x_2, а саме ті, що забезпечують оптимум цільової функції. У даному разі – її максимум. При цьому розв'язком задачі безумовної оптимізації (2.2) може бути будь-яка точка двовимірного евклідового простору $\mathbf{R}^2$ (безмежної площини). Тому повний запис задачі (2.2) має вигляд:

$$Y(x_1, x_2) = 800x_1 + 1000x_2 \longrightarrow \max_{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2}.$$

4. Визначимо обмеження задачі Ω, тобто область допустимих рішень.

По-перше, загальні витрати деревини на виробництво всіх виробів не можуть перевершувати 400м^2:

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 \le 400. \tag{2.3}$$

По друге, загальні витрати робочого часу на виробництво всіх виробів не можуть перевершувати 600 *чол-год*:

$$f_2(x_1,x_2) = 4x_1 + 3x_2 \leq 600. \tag{2.4}$$

Крім того, кількості виробів кожного виду не можуть бути від'ємними, тобто:

$$x_1,x_2 \geq 0. \tag{2.5}$$

До того ж невідомі (змінні) задачі за своєю суттю є цілочисловими величинами:

$$x_1,x_2 = int. \tag{2.6}$$

Вирази (2.3) – (2.6) враховують всі обмеження задачі, тому область припустимих рішень задачі визначається як

$$\begin{aligned} \Omega: \quad & f_1(x_1,x_2) = 2x_1 + 4x_2 \leq 400; \\ & f_2(x_1,x_2) = 4x_1 + 3x_2 \leq 600; \\ & x_1,x_2 \geq 0; \\ & x_1,x_2 = int. \end{aligned}$$

Запис «Ω:» означає, що далі (після символу «:») ідуть вирази, які визначають властивості кожного елементу множини Ω. Зауважимо, що множина точок Ω належить евклідовому простору $\mathbf{R}^2$ і складає тільки частину всіх точок простору:$\Omega \subset \mathbf{R}^2$.

5. Сформуємо завершальну математичну модель задачі (з урахуванням обмежень):

$$Y(x_1,x_2) = 800x_1 + 1000x_2 \longrightarrow \max_{x\in\boldsymbol{\Omega}}, \tag{2.7}$$

$$\Omega: \quad f_1(x_1,x_2) = 2x_1 + 4x_2 \leq 400; \tag{2.8}$$

$$f_2(x_1, x_2) = 4x_1 + 3x_2 \leq 600; \quad (2.9)$$

$$x_1, x_2 \geq 0; \quad (2.10)$$

$$x_1, x_2 = int \quad (2.11)$$

Задача (2.7) – (2.11) є задачею цілочислового лінійного програмування. Шукане рішення: $x_1 = 120, x_2 = 40$. Якщо меблева фабрика виготовить 120 столів і 40 шаф, то вона отримує максимальний прибуток у розмірі $Y = 800 \cdot 120 + 1000 \cdot 40 = 136000$ грн.

Предметом математичного програмування є способи математичного моделювання оптимізаційних задач, визначення необхідних і достатніх умов наявності екстремумів (оптимумів), розробка і дослідження методів визначення оптимальних розв'язків, які оминають пошук екстремальних розв'язків прямим перебором.

В загальному випадку математична постановка задачі екстремальної задачі полягає в визначенні мінімального або максимального значення цільової функції $y(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при умовах $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i$ $(i = \overline{1, m})$, $x_j^+ \leq x_j \leq x_j^{++}$, де $y(\bar{x})$ і $f_i(\bar{x})$– задані функції, а b_i, x_j^+, x_j^{++}– деякі дійсні числа.

2.3. Загальна задача математичного програмування, її класифікація

Залежно від властивостей функцій y і f_i математичне програмування розпадається на декілька самостійних дисциплін, що займаються дослідженням і розробкою методів розв'язання окремих класів задач. На рис. 2.1 подана класифікація задач математичного програмування.

Перед усім задачі математичного програмування поділяються на детерміновані задачі та задачі стохастичного або динамічного програмування.

Динамічне програмування – це розділ математичного програмування, що пов'язаний з вирішенням екстремальних задач спеціальної структури, а саме задач, в яких процес пошуку оптимального рішення є багатоетапним.

Стохастичне програмування має справу з екстремальними задачами, в постановці яких присутні випадкові величини.

Детерміновані задачі – це найбільш поширений клас задач математичного програмування. Вихідна інформація в таких задачах є повністю визначеною. Всі детерміновані задачі поділяються на задачі лінійного чи нелінійного програмування.

Нелінійне програмування. В задачах цього класу цільова функція й (або) обмеження є нелінійними функціями. В нелінійному програмуванні виділяють клас багатоекстремальних задач та клас задач опуклого програмування.

Рисунок 2.1 – Класифікація задач математичного програмування

В *багатоекстремальних задачах* цільова функція має декілька екстремумів. В задачах *опуклого програмування* – тільки один.

Опукле програмування об’єднує три підкласи екстремальних задач:

– задачі при *двобічних обмеженнях змінних* і відсутності обмежень у вигляді рівнянь;

– задачі *квадратичного програмування*, які пов’язані з пошуком екстремуму квадратичної функції при лінійних обмеженнях;

– задачі в *загальній* постановці, тобто ті, що не належать до двох попередніх підкласів.

Лінійне програмування. В задачах цього класу цільова функція та всі обмеження є лінійними функціями. Лінійне програмування об’єднує:

– підклас задач дискретного програмування;

– підклас задач дрібно-лінійного програмування;

– підклас задач параметричного програмування;
– підклас транспортних задач.

В задачах *дискретного* (цілочислового) програмування невідомі (змінні) можуть приймати тільки цілочислові значення. У задачах *дрібнолінійного* програмування цільова функція являє собою відношення двох лінійних функцій, а функції, що визначають область припустимих рішень, є звичайними лінійними функціями. У задачах *параметричного* програмування цільова функція або функції обмежень, або й те й інше залежать від деяких параметрів (коефіцієнти можуть змінюватися в деяких межах). Окремим класом лінійних задач являють собою *транспортні задачі*, в яких змінні подаються у вигляді матриці.

Контрольні запитання

1.Описати способи подання оптимізаційної задачі
2.Описати оптимізаційну задачу в змістовній постановці.
3.Описати оптимізаційну задачу в формальній постановці .
4.Описати класифікацію задач математичного програмування

Тема 3. Математична постановка оптимізаційної задачі

3.1. Приклади типових оптимізаційних задач

Кожна з наведених нижче задач має свою назву, що відображає її первинне походження, але більшість сучасних задач, які розв'язуються на рівні бізнес-управління, може бути зведена до цих класичних прикладів. Типові приклади виконують як функцію прототипа-аналога так і накопичувача знань щодо об'єктно-орієнтованого способу розв'язання конкретних прикладних задач. Зводячи технічні задачі до прикладів, що будуть наведені, ми отримаємо вже відпрацьований ефективний математичний апарат та алгоритмічний інструмент розв'язання своїх специфічних задач, тобто ці приклади виконують функцію підказки, що вказують прийоми формалізації специфічних актуальних сучасних задач.

До оптимізаційних задач можна віднести наступні класи задач:

– задачі планування виробництва (планування випуску продукції, завантаження устаткування, фінансування проєктів, розподіл парку машин, календарне планування, мережеве планування);

– задачі організації виробництва (формування парку встаткування, про призначення, про реконструкцію підприємства, про розташування виробничих одиниць, про закриття заводу);

– транспортні задачі (логістика перевезення вантажів з максимальним завантаженням транспорту й з максимальним об'ємом перевезень, розподіл транспортних засобів, розміщення вантажних засобів);

– комбінаторні задачі (про лінійний розкрій, про розподіл пам'яті комп'ютера, про комівояжера).

3.2. Задача про розкрій. Задача виробничого планування

На фірмі, що спеціалізується на виробництві корпусів для системних блоків, листи металу можуть розкроюватися декількома способами. Якщо лист розкроїти за j-м способом ($j = \overline{1,n}$), то отримаємо a_{ij} корпусів i-го виду ($i = \overline{1,m}$), при цьому величина відходів з одного листа дорівнює c_j(м^2).

Необхідно знайти, яку кількість листів металу необхідно розкроювати за кожним із способів для того, щоб отримати корпусів i-го виду не менше ніж b_i із мінімальною кількістю відходів.

Якщо через x_j позначити кількість листів металу, розкроєних j-м способом, то математична модель та постановка задачі набуває вигляду:

$$W = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min_{X \in G},$$

де ОДР G являє собою умови стосовно виконання обмежень на виробництво корпусів j -го типу:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = \overline{1,m})$$

та на x_j ($j = \overline{1,n}$) ,які випливають із фізичного змісту цих змінних:

$$x_j \geq 0, x_j \in \mathbb{N}_0, X = [x_1, \ldots, x_n]^T \ (j = \overline{1,n}).$$

Задача виробничого планування або задача оптимального використання ресурсів виробництва

Для виробництва продукції j-го виду ($j = \overline{1,n}$) фірма має обмежені ресурси (виробничі приміщення, спеціалізовані прилади, оргтехніка, витратні матеріали, кількість фахівців, фінансові ресурси тощо) b_i ($i = \overline{1,m}$). Витрати ресурсів i-го виду на виготовлення одиниці продукції j-го виду дорівнюють a_{ij}.

Необхідно знайти скільки та якої продукції виробляти, щоб отримати максимальний прибуток. Вважаємо, що збут продукції кожного виду відбувається повністю.

Якщо позначити через x_j, P_j відповідно об'єм продукції j-го виду та прибуток від його реалізації, то математична модель постановки задачі набуває вигляду

$$W = \sum_{j=1}^{n} P_j x_j \to \max_{X \in G}$$

за умови виконання обмежень G по ресурсах:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,m})$$

із урахуванням фізичного змісту об'ємів виробництва

$$x_j \ge 0, x_j \in \mathbb{N}_0 , X = [x_1, \ldots, x_n]^T \quad (j = \overline{1,n}).$$

3.3. Задача про призначення

Фірма, що займається гарантійним обслуговуванням та ремонтом комп'ютерної техніки має у своєму розпорядженні n ремонтних бригад. Відома продуктивність c_{ij} кожної i-ої бригади $(i = \overline{1,m})$ при виконанні j-ої роботи.

Потрібно так розподілити бригади за роботами, щоб досягти максимальної сумарної виробничої потужності. Зрозуміло, що i-та бригада може виконувати в деякому інтервалі часу лише одну задану роботу.

Таблиця 3.1.
Ілюстрація можливого робочого завантаження бригад

Номер бригади	Номер роботи							
	1	2	X	4	X	6	X	X
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0

Якщо нас цікавить тільки заданий інтервал часу, то немає сенсу розглядати ті роботи, що протягом всього інтервалу часу не виконуються. Або розглядати ті бригади, на які в даному інтервалі часу роботи не вистачило (табл. 3.1), тобто при побудові математичної моделі задачі вважаємо, що кількість робіт, які необхідно виконати дорівнює кількості бригад (всі роботи обов'язково виконуються, всі бригади працюють) (табл. 3.2).

Математичну модель описаного явища можливо представити у вигляді матриці.

Відповідно до змісту задачі про призначення, в окремому стовпці, наприклад другому, чи в окремому рядку, наприклад третьому, може бути лише одна одиниця, яку інтерпретуємо як призначення третьої бригади для виконання роботи 2-го типу.

Таблиця 3.2.
Побудова матриці математичної моделі

Номер бригади	Номер роботи j					
	1	2	…	$n-2$	$n-1$	n
1	1	0	…	0	0	0
2	0	1	…	0	0	0
…	…	…	…	…	…	…
$n-2$	0	0	0	0	0	1
$n-1$	0	0	0	0	1	0
n	0	0	0	1	0	0

Остаточно математична модель та постановка задачі набувають вигляду:

$$W = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \max_{X\in G}$$

за умови виконання обмежень G:

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1,$$

де $X = [x_{11}, x_{12}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{nn}]^T$ − кількість компонент вектора дорівнює n^2 .

3.4. Задача про перевезення. Задача про розподіл ресурсів

Задача про розподіл ресурсів

У виробничій компанії є технічні і людські ресурси $R_1, R_2, \dots, R_m \dots$ (наприклад, кількість бригад монтажу та ремонту обладнання, кількість бригад технологічної підтримки абонентів і т.д.) для надання виробничих послуг у кількості відповідно $b_1, \dots, b_m$ одиниць. За допомогою цих ресурсів можливо надати послуги $T_1, \dots, T_n$ (наприклад, голосовий зв'язок, визначення координат мобільної станції, можливість прийому зображень у реальному часі, можливість забезпечити безпроводовий інтернет і т.д.). Для забезпечення послуги T_j необхідно a_{ij} одиниць ресурсу R_i $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}$. Кожна одиниця ресурсу R_i коштує d_i $(i = \overline{1,m})$. Кожну послугу T_j можливо реалізувати за ціною c_j $(j = \overline{1,n})$. На кожний вид послуги є свій запит: відомо, що ринок послуг може скористатись не більше, ніж K_j одиницями послуги T_j $(j = \overline{1,n})$. Задача полягає в тому, щоб знайти які послуги і в якій кількості реалізувати для отримання максимального прибутку.

Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо: $x_1, x_2, \dots, x_n$– кількісний вираз послуги відповідно $T_1, T_2, \dots, T_n$, які заплановано «виробити».

Умови запиту та фізичний зміст накладають на x_j $(j = \overline{1,n})$ обмеження $0 \leq x_j \leq K_j$ $(j = \overline{1,n})$. Обмеження виду:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = \overline{1,m})$$

формалізують вимогу не перевищення наявного запасу відповідного ресурсу.

Обчислимо прибуток L в залежності від елементів рішення $x_1, \dots, x_n$. Собівартість одиниці послуги T_j дорівнює:

$$S_j = a_{1j} d_1 + a_{2j} d_2 + \dots + a_{nj} d_n = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} d_i \quad (j = \overline{1,n}).$$

Чистий прибуток q_j, який буде отримано від реалізації одиниці послуги T_j дорівнює різниці між її ціною для продажу c_j та собівартістю S_j:

$$q_j = c_j - S_j \quad (j = \overline{1,n}).$$

Загальний чистий прибуток від реалізації усіх послуг дорівнює значенню виразу:

$$W = \sum_{j=1}^{n} q_j x_j.$$

Математична модель і постановка задачі набувають вигляду:

$$W = \sum_{j=1}^{n} q_j x_j \to \max_{X \in G},$$

за умови виконання обмежень G:

$$0 \le x_j \le K_j \ (j = \overline{1,n}),$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = \overline{1,m})$$

$X = [x_1, \dots, x_n]^T$

Цей запис означає: знайти такі невід'ємні та обмежені зверху значення $x_j \ (j = \overline{1,n})$, при яких задовольняються ресурсні обмеження та максимізується показник ефективності.

Задача «про перевезення»

Теоретична постановка задачі полягає в тому, що фірма, яка працює за технологією інтернет-магазину має на всій території України m складських приміщень $c_1, \dots, c_m$та n пунктів споживання продукції $П_1, \dots, П_n$.

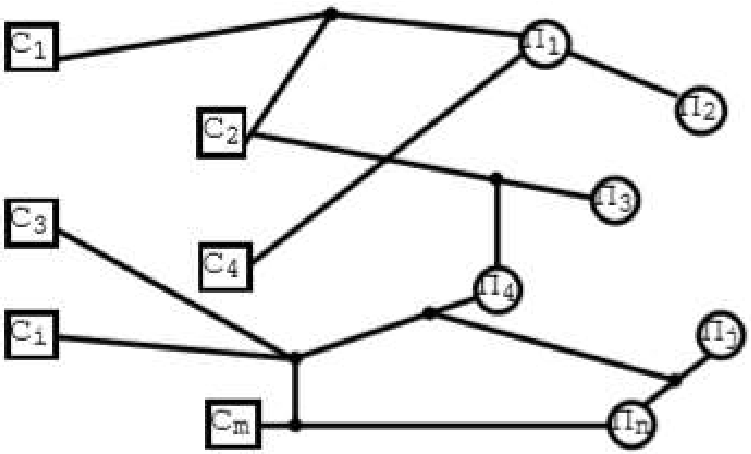


Рис. 3.1. Схема розташування складів $c_i \ (i = \overline{1,m})$та споживачів $П_j \ (j = \overline{1,n})$ та мережі транспортних сполучень

Суть задачі полягає у складанні плану перевезень із складів $c_i \ (i = \overline{1,m})$ в пункти споживання $П_j \ (j = \overline{1,n})$ деякого виробничого обладнання. На складах $c_i \ (i = \overline{1,m})$ є запаси цього обладнання у кількості a_i одиниць. Користувачі послуг $П_j$ інтернет-магазину надали заявок відповідно b_j одиниць обладнання. Заявки можливо виконати, якщо сума усіх заявок не перевищує суму усіх запасів $\sum_{j=1}^{n} b_j \le \sum_{i=1}^{m} a_i$.

Склади пов'язані із пунктами споживання Π_j $(j = \overline{1,n})$ мережею доріг із визначеними тарифами перевезення. Вартість перевезення одиниці товару зі складу c_i у пункт споживання Π_j дорівнює v_i $(i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$. Потрібно скласти план перевезень, тобто вказати з якого складу в які пункти і яку кількість обладнання необхідно спрямувати таким чином, щоб заявки були виконані, а загальні витрати на всі перевезення були мінімальні.

Побудуємо математичну модель задачі. Позначимо x_{ij} – кількість одиниць обладнання, яка спрямовується зі складу c_i у пункт Π_j. Розв'язок (план перевезень) складається із $n \times m$ чисел, які представимо у вигляді прямокутної матриці:

$$P = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix} = \{x_{ij}\}\Big|_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}} .$$

Потрібно обрати такі невід'ємні значення змінних x_{ij} , що є елементами матриці перевезень P , щоб були виконані наступні умови:

1. Ємність складу перевищувати не можна (це означає, що загальна кількість обладнання, яке було взяте із кожного складу не повинна перевищувати його запасів на цьому складі):

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \ (i = \overline{1,m}) .$$

2. Заявки, сформовані споживачами, повинні бути виконаними:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le b_j \ (j = n) .$$

3. Загальна вартість перевезень повинна обчислюватись за формулою:

$$W = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} v_{ij} x_{ij} .$$

Постановка задачі формулюється наступним чином: знайти такий план перевезень P , щоб вартість W була мінімальною і всі обмеження були виконаними, за умови, коли сума усіх заявок дорівнює сумі усіх запасів:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i ,$$

тобто з кожного складу буде вивезено усе, що на ньому є, і нерівність пункту 1 перетворюється у рівність:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = \overline{1,m}) \ .$$

Постановка задачі математичного програмування в цьому випадку набуває вигляду:

$$W = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} v_{ij}x_{ij} \to \min_{X\in G}$$

за умови виконання обмежень G:

$$x_{ij} \geq 0 \ (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n}) \ ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \ (i = \overline{1,m}) \ ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_i \ (j = \overline{1,n}) \ ,$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \sum_{i=1}^{m} a_i \ .$$

Ця задача ще має назву «транспортна задача із правильним балансом».

Із наведених прикладів видно, що більшість задач сформульовані із використанням лише лінійних функцій від елементів розв'язків як у показнику ефективності, так і в обмеженнях. Нагадаємо, що за цими елементами необхідно було знайти максимум або мінімум показника ефективності. Такі задачі в математичному програмуванні виділені в окремий клас задач, що отримав назву **задачі лінійного програмування**. Перейдемо до їх детального вивчення.

Контрольні запитання

1.Описати задачу про розкрій.

2.Описати задачу виробничого планування або задача оптимального використання ресурсів виробництва.

3.Описати задачу про розподіл ресурсів.

4.Описати задачу «про перевезення» .

Тема 4. Лінійне програмування

4.1. Математична постановка

Загальна задача лінійного програмування (ЗЛП) формулюється в такий спосіб: знайти *оптимум лінійної функції цілі* $y(\bar{x})$, якщо *обмеження* $f_i(\bar{x})$ *лінійні* й *вектор змінних* $\bar{x}$ *невід'ємний*.

Аналітичний запис цієї задачі має вигляд:

$$y(\bar{x}) = \bar{c}^T\bar{x} + c_0 \longrightarrow \underset{\bar{x}\in\boldsymbol{\Omega}\subset\mathbf{R}^{\mathbf{n}}}{\text{opt}}, \tag{4.1}$$

$$\Omega: \begin{cases} A_1\bar{x} \le \bar{b}_1; \\ A_2\bar{x} \le \bar{b}_2; \\ A_3\bar{x} \le \bar{b}_3; \\ \bar{x} \ge 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

де $\bar{x}$ n-вимірний вектор-стовпець дійсних змінних $\bar{x} \in R^n$; $\bar{c}^T$ - n-вимірний вектор-рядок коефіцієнтів функції цілі; c_0 – вільний член цільової функції; A_1, A_2, A_3 – матриці коефіцієнтів систем лінійних рівнянь розмірності $m_1 \times n,\ m_2 \times n,\ m_3 \times n$ відповідно; $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ – вектори-стовпці вільних членів систем обмежень розмірності $m_1 \times 1,\ m_2 \times 1,\ m_3 \times 1$ відповідно.

Задачу (4.2) подано у векторно-матричній формі, що значно спрощує її запис і розгляд.

Задачу, що складається з виразів (4.1), (4.2) називають *стандартною* ЗЛП.

Якщо обмеження ЗЛП записані у вигляді *рівностей*, то говорять про *канонічну* ЗЛП.

Канонічна ЗЛП у векторно-матричній формі має вигляд:

$$y(\bar{x}) = \bar{c}^T\bar{x} + c_0 \longrightarrow \underset{\bar{x}\in\boldsymbol{\Omega}\subset\mathbf{R}^{\mathbf{n}}}{\text{opt}}, \tag{4.3}$$

$$\Omega: \begin{cases} A\bar{x} = \bar{b}; \\ \bar{x} \ge 0, \end{cases} \tag{4.4}$$

де A – матриця коефіцієнтів розмірності $m \times n, m < n$; $\bar{b}$– вектор вільних членів розмірності 1 ×m .

Канонічна, або *основна* ЗЛП в алгебраїчному записі має вигляд:

$$y(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0 \longrightarrow \underset{\boldsymbol{\Omega}}{\text{opt}}, \tag{4.5}$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ f_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \qquad \cdots \\ f_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m; \\ \qquad x_j \geq 0, \quad (j = \overline{1,n}), \end{cases} \tag{4.6}$$

Перетворення стандартної ЗЛП в канонічну виконують за допомогою алгоритму:

1. Обмеження-нерівність типу "$\leq$" перетворюють в обмеження-рівність додаванням до її лівої частини додаткової невід'ємної змінної. Наприклад, нерівність $\{x_1 - x_3 + x_5 \leq 3\}$ перетворюється в рівність $\{x_1 - x_3 + x_5 + x_6 = 3\}$.
2. Обмеження-нерівність типу "$\leq$" перетворюють в обмеження-рівність *додаванням до її лівої частини додаткової невід'ємної змінної з* негативним знаком. Наприклад, нерівність $\{x_1 + x_4 - 5x_5 \geq 8\}$ перетворюється в рівність $\{x_1 + x_4 - 5x_5 - x_6 = 8\}$.
3. Задача мінімізації зводиться до задачі максимізації і навпаки шляхом множення цільової функції $y(\bar{x})$ на –1 (мінус одиницю).

Наприклад, задача мінімізації $y(\bar{x}) \longrightarrow \min$ еквівалентна задачі максимізації $[-y(\bar{x}) \to \max]$.

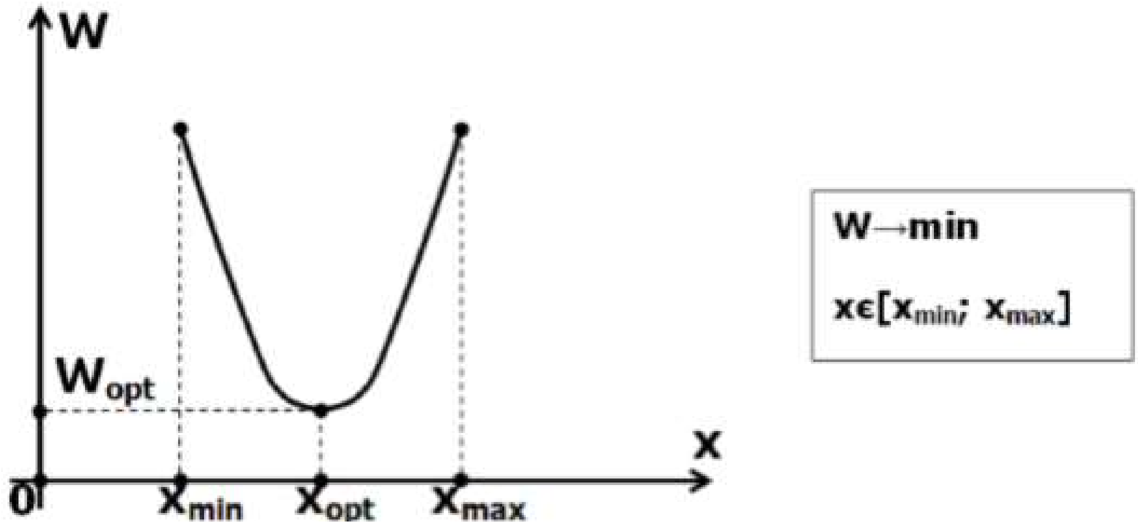
Таким чином, задачу лінійної оптимізації (4.1) – (4.2) завжди можна перетворити в задачу (4.3) – (4.6) і навпаки.

4.2. Загальна задача лінійного програмування та задача дослідження операцій

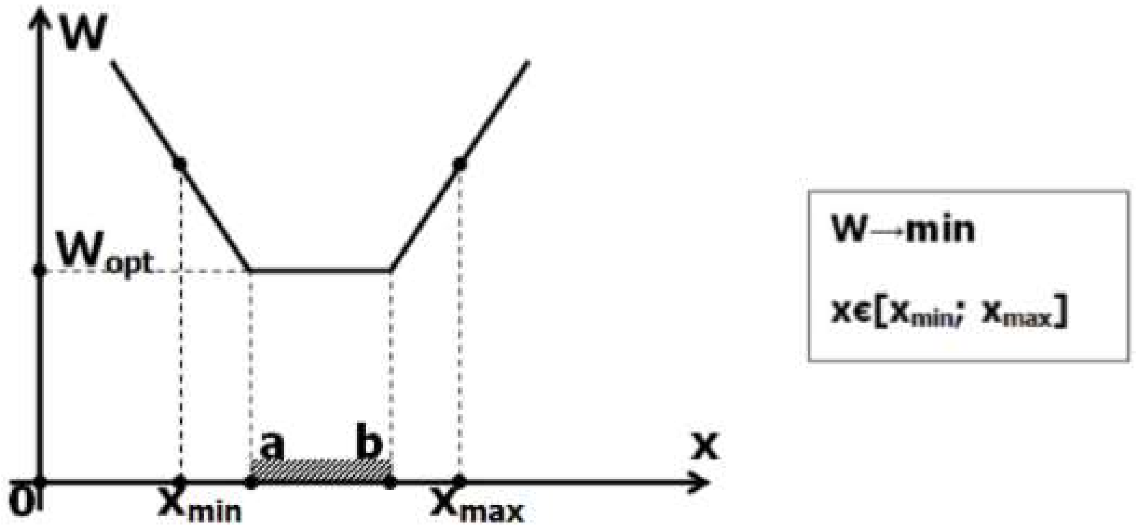
Послідовність розв'язання задачі пошуку найкращих дій за заданим показником ефективності W (задача дослідження операцій) складається з наступних етапів:

1) якісна (неформальна, змістова, вербальна) постановка задачі дослідження операцій;
2) побудова математичної моделі;
3) математична постановка задачі;
4) розробка методу розв'язання задачі (метод оптимізації);
5) розробка методики та алгоритму реалізації запропонованого методу;
6) розробка комп'ютерної програми;
7) розрахунок (чисельний експеримент), імітаційне моделювання;

8) інтерпретація отриманого результату.



а) точка оптимуму єдина



б) $x_{opt} \in [a;b]$ – континуум

Рисунок 4.1 – Графічна ілюстрація можливостей існування єдиного та безлічі оптимальних планів

Загальною *задачею математичного програмування* є знаходження глобального екстремуму показника ефективності W на області допустимих значень G . Тобто математичне програмування дозволяє виконати 4) та 5) етапи задачі дослідження операцій.

Окрім терміну математичне програмування, ще використовують термін математична модель оптимізації, або математична модель розв’язання задач на екстремум. Набір змінних $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, який задовольняє обмеженням G, називають *планом задачі математичного програмування*.

Система обмежень повинна бути сумісною, інакше множина планів буде порожньою множиною. Множина планів може бути як обмеженою, так і не обмеженою. План, що надає показнику ефективності оптимальне значення називається оптимальним, оптимальний розв'язок не завжди єдиний (рис. 4.1).

4.3. Приклад задач лінійного програмування

Записати задачу

$$y = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \longrightarrow \min_{x_j \in \Omega \subset R^5},$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1 = 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \leq 2; \\ f_2 = x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \leq 3; \\ f_3 = 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \leq 6; \\ f_4 = x_1 + x_4 - 5x_5 \geq 8; \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5} \end{cases}$$

в канонічну задачу у векторно-матричній формі та привести до задачі максимізації.

Розв'язання:

1. Нерівності типу "≤" (f_1, f_2, f_3)перетворимо в рівності шляхом додавання до їх лівих частин додаткових змінних x_6, x_7, x_8 відповідно: $f_1 = 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2;$ $f_2 = x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3;$ $f_3 = 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6.$
2. Нерівність типу "≤" (f_4)перетворимо в рівність шляхом додавання до її лівої частини додаткової змінної x_9 з негативним знаком: $f_4 = ax_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8;$
3. Зведемо задачу мінімізації до задачі максимізації:

$$y = -3x_1 + 2x_2 + 5x_4 - x_5 \longrightarrow \max_{x_j \in \Omega \subset R^5}$$

4. Запис канонічної ЗЛП за умовами прикладу в алгебраїчній формі має вигляд:

$$y = -3x_1 + 2x_2 + 5x_4 - x_5 \longrightarrow \max_{x_j \in \Omega \subset R^5},$$

$$\Omega: \begin{cases} f_1 = 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 \le 2; \\ f_2 = x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 \le 3; \\ f_3 = 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 \le 6; \\ f_4 = x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 \ge 8; \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,9} \end{cases}$$

5. Запис цієї задачі в векторно-матричній формі має вигляд:

$$y = [-3\ \ 2\ \ 0\ \ 5\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]\bar{x} \to \max_{x_j \in \Omega \subset \boldsymbol{R}^9},$$

$$\Omega: \begin{cases} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} \\ \bar{x} \ge 0. \end{cases}$$

В основу моделей лінійного програмування закладені два припущення, які майже завжди виконуються:

- припущення подільності, яке полягає в тому, що сумарна кількість ресурсів, що використовуються і відповідний прибуток строго пропорційні обсягу випущеної продукції;
- припущення адитивності полягає у рівності загальної суми всіх затрачених ресурсів кількості ресурсів, спожитих в технологічних процесах та рівності загального прибутку всім прибуткам, отриманим в процесах.

Питання про постановку задачі лінійного програмування розглянемо на прикладі.

Приклад. Вибрати найдешевший режим харчування, що забезпечує наявність всіх необхідних поживних речовин.

Розв'язування. Вважатимемо, що є три види продуктів: B_1, B_2, B_3 і необхідна кількість поживних речовин позначена A_1, A_2, A_3, A_4. Позначимо - кількість поживних речовин вигляду A_i в продукті виду B_j, β_i — мінімальна добова потреба в речовині; c_i — ціна одиниці їжі. Загальна кількість спожитих речовин не повинна бути меншою ніж мінімальна добова потреба в цій речовині.

Види поживних речовин	Види продуктів			Мінімальна потреба в речовині на добу
	B_1	B_2	B_3	
A_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}	β_1
A_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}	β_2
A_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}	β_3
A_4	α_{41}	α_{42}	α_{43}	β_4
Вартість одиниці продукту	c_1	c_2	c_3	

Враховуючи обмеження, отримаємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq \beta_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \geq \beta_2 , \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \geq \beta_3 , \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 \geq \beta_4 . \end{cases} \tag{4.7}$$

Вартість всієї їжі позначимо z і вона повинна бути мінімальною, тобто

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 \text{ (min)} . \tag{4.8}$$

Так як від'ємна кількість їжі не має логічного змісту, то $x_i \geq 0$. До такого класу відносяться всі задачі з подібними системами обмежень та аналогічним виглядом цільової функції, що оптимізується на максимум чи мінімум.

Математично такі задачі формулюються так: *серед невід'ємних розв'язків системи нерівностей (4.7) знайти такий, який надає функції (4.8) найменшого значення.*

4.4. Властивості розв'язків задач лінійного програмування

Загальна лінійна математична модель процесів та явищ - так звана загальна задача лінійного програмування подається у вигляді:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \text{ (max)} \tag{4.9}$$

за умов:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le, \ge, = b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le, \ge, = b_2 , \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le, \ge, = b_m . \end{cases} \quad (4.10)$$

$$x_1 \ge 0 , x_2 \ge 0 , \ldots , x_n \ge 0 . \quad (4.11)$$

Отже, потрібно знайти значення змінних $x_1 , x_2 , \ldots x_n$, які задовольняють умови (4.10) і (4.11), і цільова функція (4.9) набуває екстремального (максимального чи мінімального) значення.

Для довільної задачі математичного програмування були введені поняття допустимого та оптимального планів.

Для загальної задачі лінійного програмування використовуються такі поняття.

Вектор $X = (x_1 , x_2 , \ldots x_n)$ координати якого задовольняють систему обмежень (4.10) та умови невід'ємності змінних (4.11), називається *допустимим розв'язком (планом) задачі лінійного програмування.*

Допустимий план $X = (x_1 , x_2 , \ldots x_n)$ називається *опорним планом* задачі лінійного програмування, якщо він задовольняє не менше, ніж m лінійно незалежних обмежень системи (4.10) у вигляді рівностей, а також обмеження (4.11) щодо невід'ємності змінних.

Опорний план $X = (x_1 , x_2 , \ldots x_n)$ називається *невиродженим,* якщо він містить точно m додатних змінних, інакше він *вироджений.*

Опорний план $X^* = (x^*_1 , x^*_2 , \ldots x^*_n)$, за якого цільова функція (4.9) досягає максимального (чи мінімального) значення, називається *оптимальним розв'язком (планом) задачі лінійного програмування.*

Контрольні запитання

1. Наведіть приклади типових оптимізаційних задач.
2. Які задачі називають оптимізаційними? Надайте їх класифікацію.
3. Який розв’язок задачі лінійного програмування називають оптимальним?
4. Які припущення закладають в основу моделі лінійного програмування?
5. Яка математична суть задач лінійного програмування?
6. Що називають опорним планом?

Тема 5. Графічний спосіб розв'язування задач лінійного програмування

5.1. Геометрична інтерпретація задач лінійного програмування

Графічний метод є найбільш простим і наочним методом вирішення ЗЛП. Він застосовується для розв'язання задач з двома змінними, що подані в стандартній формі, або для задач з $m + 2$ змінними, що подані в канонічній формі, де m – число лінійно незалежних обмежень-рівностей.

Допустима множина розв'язків задачі лінійного програмування Ω утворює опуклий многокутник, на границі якого знаходиться оптимум функції цілі y^*. На цій множині можна розташувати безліч рівнів цільової функції, тобто ліній, в кожній точці яких цільова функція набуває однакових значень. Для лінійної цільової функції рівні утворюють множину паралельних прямих.

З геометричної точки зору при розв'язанні ЗЛП шукають таку кутову точку області Ω, в якій лінія рівня з найменшим (при мінімізації) або з найбільшим (при максимізації) значенням цільової функції торкається цієї області Ω.

Для знаходження екстремального значення цільової функції використовують вектор-градієнт $\bar{c}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_1} & \frac{\partial y}{\partial x_2} \end{bmatrix}$, який показує напрям найшвидшого зростання цільової функції. Компонентами вектора $\bar{c}$ є коефіцієнти цільової функції $y(\bar{x})$.

Для розв'язання задачі графічним методом, її необхідно попередньо привести до стандартної форми з двома змінними:

$$y(\bar{x}) = [c_1 \;\; c_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow \underset{x_j \in \Omega \subset R^2}{\mathrm{opt}}, \tag{5.1}$$

$$\Omega: \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} [\neq] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix};, \tag{5.2}$$

$$\bar{x} \geq 0,, \tag{5.3}$$

де $[\neq]$ – знак відношення «≤» чи «≥».

5.2. Графічний метод розв'язування задач лінійного програмування

Алгоритм розв'язання задачі лінійного програмування *графічним* методом у загальному випадку складається з таких етапів:

1. Приведення математичної моделі задачі до вигляду (5.1) – (5.3).

2. Побудова прямих, визначених рівняннями $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$, $i = \overline{1, m}$; $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$.

Для побудови i-ої прямої знаходять пару точок $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ знаходять пару точок $\left(0; {b_i}/{a_{i2}}\right)$ і $\left({b_i}/{a_{i1}}; 0\right)$.

3. Знаходження півплощин, обумовлених кожним з обмежень задачі (5.2), (5.3).

Для кожної півплощини беремо яку-небудь точку $\bar{x}_0^T$, наприклад $\bar{x}_0^T = [0\ \ 0]$, і перевіряємо відповідну нерівність $a_{i1}x_{01} + a_{i2}x_{02} = b_i$. Якщо нерівність виконується, точка $\bar{x}_0^T$ належить шуканій півплощині, інакше – не належить. Знайдені півплощини виділяємо будь-яким зручним способом.

4. Виділення многокутника розв'язків.

Перетин виділених півплощин утворює многокутник розв'язків, тобто область припустимих розв'язків **Ω**.

5. Побудова прямої $y_0 = c_1x_1 + c_2x_2$, що проходить через многокутник розв'язків. Тут y_0 – константа, яка обирається довільно.

6. Побудова вектора $\bar{c}^T = [c_1\ \ c_2]$.

7. Переміщення прямої $y_0 = c_1x_1 + c_2x_2$ в напрямку вектора $\bar{c}$ до границі області Ω (задача максимізації) або у зворотному напрямку вектора $\bar{c}$ (задача мінімізації);

8. Визначення координат граничної точки шляхом розв'язання системи двох рівнянь. Рівняння системи визначають прямі, що перетинаються в точці $\bar{x}^*$.

9. Обчислення значення цільової функції y^* в точці $\bar{x}^*$.

При розв'язанні ЗЛП можливі чотири випадки щодо кількості та існування шуканих рішень: єдине рішення (рис. 5.1); незліченна множина рішень (відрізок AB на рис. 5.2); необмежена область припустимих рішень (рис. 5.3) і відсутність рішення через несумісність системи обмежень (рис. 5.4).

На рис. 5.1 – 5.4 показано можливі випадки при пошуку максимуму цільової функції, аналогічні ситуації можуть виникати й при пошуку мінімуму.

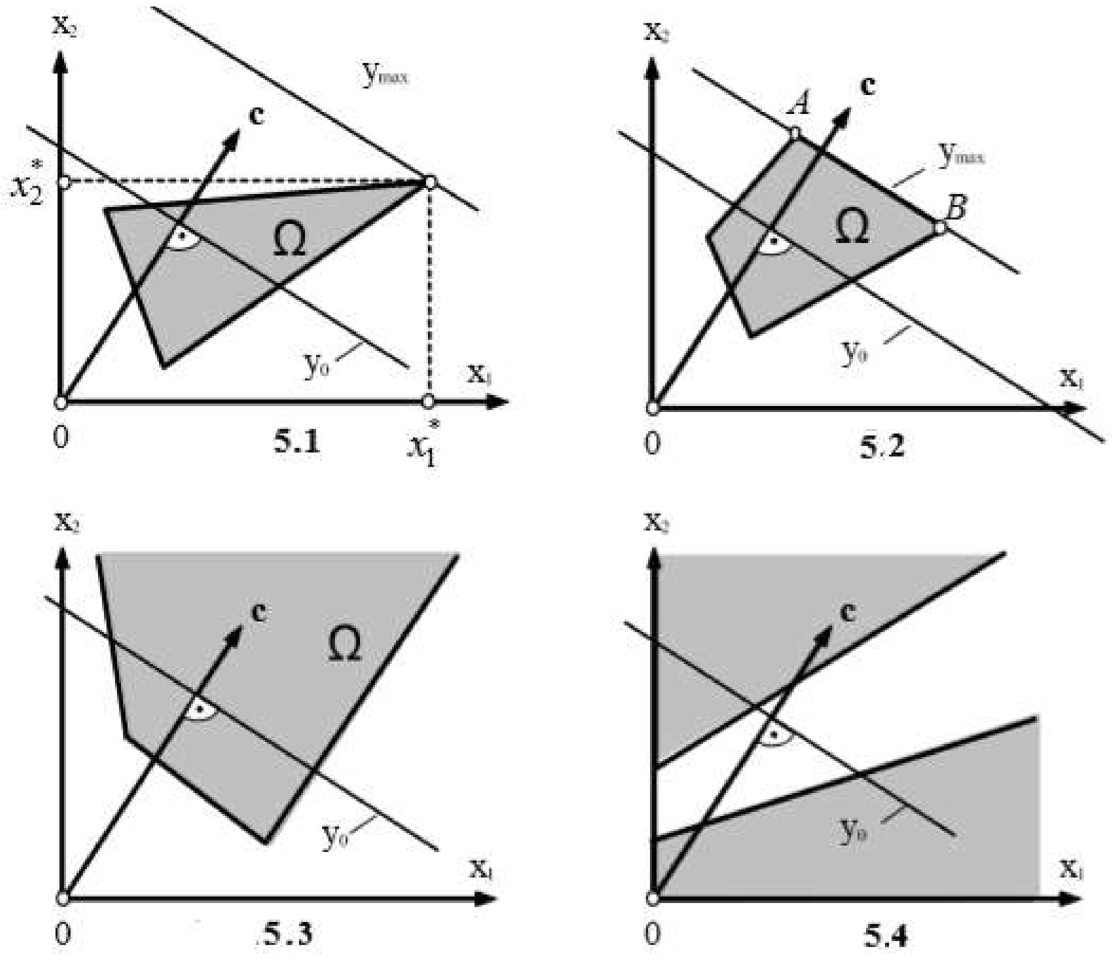


Рисунок 5.1 – Результати при пошуку максимуму цільової функції

Розглянемо графічний метод розв’язання ЗЛП на конкретному прикладі.

5.3.Приклади

Приклад. Знайти максимум і мінімум функції $y = x_1 + x_2$ при обмеженнях:

$$2x_1 + 4x_2 \le 16;$$

$$-4x_1 + 2x_2 \le 8;$$

$$x_1 + 3x_2 \le 9;$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

Розв'язання

1. Задача подана в стандартній формі: всі обмеження задачі є нерівностями. Тому ніяких попередніх перетворень робити непотрібно. Задача залишається без змін.

2. Будуємо прямі, що відповідають обмеженням задачі, а саме (див. рис. 1.6): пряму $2x_1 + 4x_2 = 16$, що проходить через точки $(8;0)$ і $(0;4)$; пряму $-4x_1 + 2x_2 = 8$, що проходить через точки $(-2;0)$ і $(0;4)$; пряму $x_1 + 3x_2 = 9$, що проходить через точки $(9;0)$ і $(0;\ 3)$; прямі $x_1 = 0$ і $x_2 = 0$.

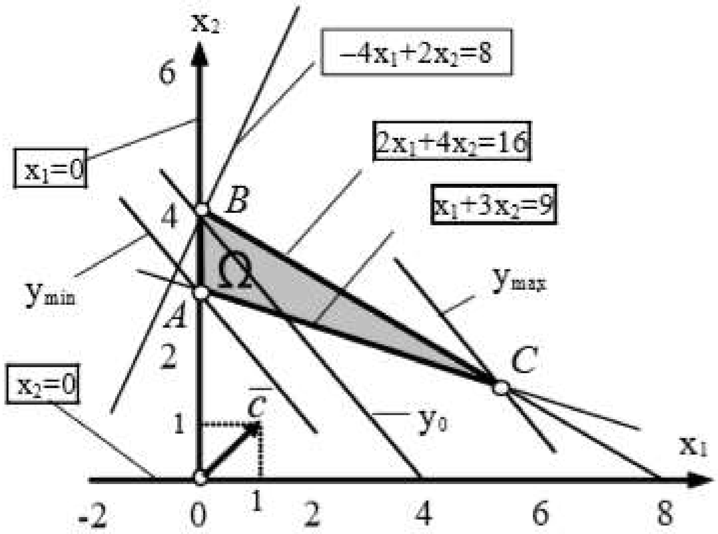


Рисунок 5.2 – Півплощини, що формують многокутник рішень

3. Знаходимо півплощини, що формують многокутник рішень. У точці $\bar{x}_0^T = [0\ \ 0]$виконується перша й друга нерівність і не виконується третя нерівність. Тому дві шукані напівплощини розміщуються нижче перших двох прямих, а остання напівплощина вище третьої прямої.

4. З урахуванням прямої $x_1 = 0$ многокутник рішень $\mathbf{\Omega}$ являє собою трикутник *ABC* на рис. 5.2.

5. Будуємо пряму $y_0 = x_1 + x_2$, що проходить через многокутник рішень. Нехай $y_0 = 4$, тоді пряма проходить через точки $(4;0)$ і $(0;4)$ на рис. 1.6.

6. Будуємо вектор $\bar{c}^T = [1\ \ 1]$, який виходить з початку координат.

7. Зміщуємо пряму y_0 паралельно до себе спочатку в напряму вектора $\bar{c}$, до кутової точці торкання, а потім в зворотному напряму до кутової точці *A* (рис. 5.2). В точці *C* цільова функція набуває максимального значення, а в точці *A* – мінімального.

8. Знайдемо координати цих точок з розв'язання відповідних систем рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 16, \\ x_1 + 3x_2 = 9, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 9, \\ x_1 = 0. \end{cases}$$

Вирішивши по черзі кожну систему, знайдемо шукані рішення: $\bar{x}_C^* = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \end{bmatrix}; \bar{x}_A^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

9. Після підстановки знайдених значень змінних у функцію цілі остаточно одержимо оптимальні значення цільової функції, а саме:

$$y_{max} = y_C^* = 6 + 1 = 7, \;\; y_{min} = y_A^* = 0 + 3 = 3.$$

Контрольні запитання

1. Які є типи задач лінійного програмування?
2. Сформулюйте задачі лінійного програмування з обмеженнями – рівностями та обмеженнями – нерівностями.
3. Яка множина називається опуклою?
4. Яка множина називається обмеженою, необмеженою?
5. Що таке гранична точка? Границя?
6. Що таке півплощина розв'язків, гранична пряма, многокутник розв'язків?
7. Де знаходиться оптимальне значення ЗЛП?
8. Сформулюйте алгоритм графічного методу відшукання оптимальних значень функції.
9. Що таке вектор нормалі, лінія рівня?
10. Як обчислити оптимальні значення цільової функції?

Тема 6. Симплекс-метод розв'язування задач лінійного програмування

6.1. Поняття про симплексний метод та основну форму

Симплекс-метод розв'язання ЗЛП вважається найбільш поширеним методом у лінійному програмуванні. Метод був розроблений Данцигом в 1947 році.

Симплексний метод – один з основних методів розв'язування задач лінійного програмування. Розглянемо його ідею на конкретному прикладі задачі про використання ресурсів з двома видами ресурсів та двома видами продукції.

Означення. Невід'ємний базисний розв'язок (план) будемо називати опорним.

Приклад. Знайти найбільше значення функції

$$z = 12 + x_1 + 2x_2$$

при наступних обмеженнях

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 16, \\ x_j \ge 0 \quad j = 1,2,3,4. \end{cases}$$

Розв'язування. Очевидно, що тут x_3, x_4 — базисні невідомі, а x_1, x_2 — вільні. Візьмемо початковий опорний план так: $x_1 = x_2 = 0$ (вільні невідомі нульові), тоді $x_3 = 12, x_4 = 16$.

$$\vec{x} = (0,0,12,16), \quad z = 12$$

Такий розв'язок відповідає ситуації, коли продукція не виробляється. Будемо збільшувати ту з вільних невідомих, яка має додатній коефіцієнт у цільовій функції (причому, більший), тому що значення цільової функції при цьому зростатиме. Це означає, що при випуску продукції прибуток збільшуватиметься. Тобто збільшуватимемо x_2.

Нехай $x_1 = 0$. Система набуває вигляду

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_2 + x_4 = 16, \\ x_j \ge 0 \quad j = 2,3,4. \end{cases}$$

Щоб x_3, x_4 ,були додатними, то в першому рівнянні x_2 можна надати найбільшого значення $\frac{12}{3} = 4$, а в другому рівнянні $\frac{16}{2} = 8$. Очевидно, що x_2 не повинно бути більше 4, в іншому випадку зміна x_3 буде від'ємною. Зміну x_2 вибираємо як найменшу частку від ділення вільних членів на відповідні коефіцієнти при x_2.

Нехай тепер $x_2 = 4$, тоді $x_3 = 0, x_4 = 8$. Дістали другий опорний план і відповідну йому цільову функцію

$$\vec{x} = (0,4,0,8), \quad z = 20.$$

Тепер базисними невідомими є x_2, x_4, а x_1, x_3 — вільні. Розв'язавши вихідну систему рівнянь відносно нового базису, отримаємо

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x_1 + x_2 + \frac{1}{3}x_3 = 4, \\ -\frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3 + x_4 = 8; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = 4 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3, \\ x_4 = 8 + \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_3. \end{cases}$$

Запишемо цільову функцію через нові вільні невідомі

$$z = 12 + x_1 + 2\left(4 - \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3\right) = 20 - \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_3 .$$

Видно, що при збільшенні вільних невідомих значення цільової функції буде спадати, тому знайдений розв'язок вважатимемо оптимальним.

Отже, ідея методу полягає в тому, щоб переходити від одного опорного плану до іншого таким способом, щоб цільова функція оптимізовувалась (зростала чи спадала в залежності від умови задачі). Змінні які переходять з базисних у вільні повинні зберігати умову невід'ємності і на кожному кроці можна міняти місцями лише одну базисну невідому з однією вільною.

Кожному опорному плану відповідає певним чином записана основна задача лінійного програмування з обмеженнями-рівностями (ОЗЛП з ОР або перша стандартна форма). Форма її запису має деякі закономірності

1. Система рівнянь записана так, що кожна базисна невідома входить лише до одного рівняння системи, з коефіцієнтом, що дорівнює одиниці. Якщо рівняння розмістити так, щоб нумерація базисних невідомих була строго зростаючою, то матриця базисних невідомих буде одиничною.
2. Вільні члени системи обмежень – невід'ємні.
3. Оптимізуюча форма залежить лише від вільних невідомих.

Означення. *ОЗЛП з ОР, яка задовольняє умовам*

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \text{ (max)} \tag{6.1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 , \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 , \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m . \end{cases} \tag{6.2}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0. \tag{6.3}$$

називають канонічною формою.

Означення. *Систему обмежень, що задовольняє умови* (6.*1*) – (6.*2*) *називають* ***канонічною системою обмежень.***

Якщо система обмежень – канонічна, а форма залежить ще від базисних невідомих, то ЗЛП називається майже канонічною.

6.2. Основні характеристики симплекс–методу

При розв'язуванні задач на практиці будемо застосовувати метод ітерації, коли при виборі кожного опорного плану, починаючи з першого, за допомогою деяких правил визначають, чи знайдено розв'язок задачі, чи треба переходити до наступного опорного плану. Такий метод назвемо ***симплексним методом*** (чи ***симплекс-методом***).

Розглянемо основні властивості методу:

1. **Повнота**. Вказуємо чи правила роботи є однозначними, чи ні, як практично побудувати перший опорний план, чи буде останній побудований план точним розв'язком задачі.
2. **Область застосовності**. Вказуємо, для яких задач можна застосувати такий метод та визначити чи підпадає конкретна задача під дія методу. Якщо розв'язок існує, але останній опорний план його не дає, то треба вказати якої помилки припущено.
3. **Властивість збіжності**. Вказуємо, чи завжди алгоритм забезпечує збіжність, чи завжди збіжність приводить до правильного результату, скільки ітерацій треба зробити для отримання розв'язку, чи можна вважати план оптимальним, якщо проведення ітерацій було припинено на деякому кроці?
4. **Вимоги до обчислень**. З'ясовуємо наскільки складними та громіздкими є обчислення методу та при якій точності обчислень ми одержимо задовільні результати.

Зазначимо, що вперше симплексний метод застосував американський вчений Дж. Данціг в 1949 році, хоча сам алгоритм методу, крім правил вибору ключового елемента, був відомий ще у XIX столітті.

Зауважимо, що немає потреби при кожній ітерації виписувати формули переходу. Цей процес можна формалізувати, використовуючи спеціальні симплекс-таблиці. При роботі з ними не будемо розрізняти де обмеження, а де оптимізуюча функція, а перетворення проведемо методом Жордана – Гаусса, дещо модифікованим.

Критерій оптимальності за симплекс-таблицями: якщо форма максимізується і в нульовому рядку відсутні від'ємні числа (за винятком, можливо, стовпця опорного плану), то опорний план є ***оптимальним.***

Коефіцієнти рядка 0 можна інтерпретувати як приріст функції z при збільшені вільної невідомої на одиницю. Приріст буде додатним, якщо коефіцієнт від'ємний, і від'ємним - якщо коефіцієнт додатний.

6.3. Робота з симплекс-таблицями

Запишемо алгоритм роботи з симплекс-таблицями:

1. Зведемо задачу до канонічної форми.
2. Формально заповнюємо таблицю коефіцієнтами цільової функції (нульовий рядок) та коефіцієнтами рівнянь системи обмежень.
3. Перевіряємо задачу на оптимальність за критерієм.
4. Для вибору ***ключового стовпця*** знаходимо найбільший елемент в 0-рядку при дослідження цільової функції на мінімум, чи найменший елемент при дослідженні її на максимум.
5. Для вибору ***ключового елемента*** складаємо відношення вільних членів (чисел стовпчика “опорний план”) до відповідних додатних чисел ключового стовпчика і вибираємо серед них менше.
6. На перетині ключового рядка і ключового стовпця маємо ***ключовий елемент***.
7. Замість базисної невідомої ключового рядка вводимо нову базисну невідому - невідому ключового стовпчика.
8. Для заповнення ключового рядка ділимо всі відповідні елементи на ключовий елемент і розміщуємо на своїх місцях у новій таблиці. Цей рядок для нової таблиці будемо називати ***ведучим.***
9. Всі інші рядки заповнюємо за методом Жордана-Гаусса

   а) знаходимо рядок, який будемо заповнювати у попередній таблиці і позначаємо в ньому число колишнього ключового стовпчика;

   б) множимо всі числа клітинок провідного рядка на число, протилежне до позначеного;

   в) додаємо число рядка, що заповнюється, попередньої таблиці до чисел відповідних стовпчиків, утворених в попередній таблиці і розміщуємо на своїх місцях у новій таблиці.
10. Перевіряємо новий опорний план на оптимальність. Якщо він не оптимальний, то повертаємось до пункту 4, якщо – оптимальний, то виписуємо отриманий розв’язок.

Розглянемо правила роботи із симплекс-таблицями на прикладі.

Приклад. Задачу лінійного програмування задано у вигляді таблиці

Види сировини	*Види продукції*		**Запаси сировини**
S_1	2	1	224
S_2	3	2	428
S_3	4	1	336
Прибуток	24	9	

Знайти оптимальний план виробництва.

Розв'язування. Позначимо x_1 – план випуску першого виду продукції, x_2- другої продукції. Складемо математичну модель отриманої задачі лінійного програмування.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 224, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 428, \\ 4x_1 + x_2 \le 336; \end{cases} \qquad z = 24x_1 + 9x_2 (\max)$$

Зведемо її до стандартної форми ввівши додаткові базисні невідомі x_3, x_4, x_5.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 224, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 428, \\ 4x_1 + x_2 + x_5 = 336; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad j = 1,2,3,4 \qquad z - 24x_1 - 9x_2 = 0 (\max)$$

Складемо симплекс-таблицю та проведемо всі необхідні перетворення за алгоритмом, описаним вище.

Номер ітерації	Номер рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
I	0	z	0	$-24\downarrow$	-9	0	0	0
	1	x_3	224	2	1	1	0	0
	2	x_4	428	3	2	0	1	0
	3	$x_5 \longrightarrow$	336	(4)	1	0	0	1
II	0	z	2016	0	$-3\downarrow$	0	0	6
	1	$x_3 \longrightarrow$	56	0	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$
	2	x_4	176	0	$\frac{5}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$
	3	x_1	84	1	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$
	0	z	2352	0	0	6	0	3

III	1	x_2	112	0	1	2	0	-1
	2	x_4	36	0	0	-2.5	1	0.5
	3	x_1	56	1	0	-0.5	0	0.5

Зауваження. Базисні стовпчики заповнюються формально і поки що для аналізу задачі не використовуються. Тому можна заповнювати таблиці і без стовпчиків базисних невідомих. Такі таблиці називають *редукованим*.

З останньої таблиці виписуємо оптимальний план

$$x_{опт} = (56{,}112{,}0{,}36{,}0), \quad z_{\max} = 2352$$

З економічної точки зору це означає, що оптимального плану ми досягнемо при випуску 56 одиниць першої продукції і 112 одиниць другої продукції.

6.4. М-метод розв’язування задач лінійного програмування

Вибір початкової канонічної форми дає змогу формалізувати відшукання оптимального розв’язку за симплекс-таблицями. Канонічна форма задачі легко будується, коли система обмежень виглядає так, як це було в задачі про використання ресурсів:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i, \quad b_i \ge 0, \quad (i = 1,2,\ldots,m).$$

При такому типі обмежень введені додаткові невідомі надавали системі обмежень (а з нею і ОЗЛП з ОР) канонічної форми. З іншого боку, така структура обмежень не охоплює всіх можливих випадків, що трапляються в лінійних оптимізаційних моделях. Крім того, є такі задачі, які взагалі не мають жодного допустимого плану. Наприклад, задача

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 - x_4 = 3, \\ x_j \ge 0 \; (j = 1,2,\ldots,4), \end{cases}$$

$$\max z = 2x_1 + x_2$$

має базисні розв’язки

$$x^1 = (0{,}0{,}2{,}-3),\; x^2 = (2{,}0{,}0{,}-1),\; x^3 = (9/4{,}-1/4{,}0{,}0),$$
$$x^4 = (0{,}-1{,}3{,}0),\; x^5 = (3{,}0{,}-1{,}0),\; x^6 = (0{,}2{,}0{,}-9),$$

кожен з яких не є опорним. Очевидно, що вона не має розв'язку. Тому розглянемо деякі методи, які дають змогу з'ясувати, чи має система обмежень допустимі плани чи ні, і вказують шляхи їх пошуку.

Нехай ОЗЛП з ОР

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_1, \ldots, x_n \ge 0, \end{cases}$$

$$(\max)\, z = c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$$

записана так, що всі вільні члени $b_i \ge 0 (i = 1,2,\ldots,n)$. Цього завжди можна досягти, помноживши, якщо це треба, рівняння з від'ємним вільним членом на -1.

Щоб дістати одиничну матрицю при базисних невідомих, формально до лівої частини кожного рівняння додаємо по одній невідомій $w_i \ge 0 (i = 1,2,\ldots,m)$, які будемо називати штучними. В результаті система обмежень набуває вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + w_1 = b_1, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n + w_m = b_m, \\ x_1, \ldots, x_n \ge 0, w_1, \ldots, w_m \ge 0, \end{cases} \tag{6.4}$$

До неї додаємо штучну форму

$$(\min)\, f = w_1 + \ldots + w_m. \tag{6.5}$$

Задача (6.4), (6.5) є задачею лінійного програмування, яка записана у майже канонічній формі відносно базисних невідомих $w_1, \ldots, w_m$. Залишається у формі (6.5) із системи обмежень (6.4) записати $w_i = (1, \ldots, m)$ через вільні невідомі $x_1, \ldots, x_n$

Означення. Систему обмежень будемо називати сумісною в області невід'ємних значень, якщо вона має хоча б один допустимий розв'язок.

Справедливим є такий критерій сумісності системи обмежень в області невід'ємних значень.

Теорема. Для того щоб система обмежень була сумісною в області невід'ємних значень, необхідно і достатньо, щоб на розв'язках (6.5)

$$f_{\min} = 0$$

З теореми випливає такий наслідок.

Наслідок. Якщо оптимальний план задачі (6.4)-(6.5) містить хоча б одну штучну невідому w_i, то вихідна задача не має розв'язку, оскільки вона не є сумісною в області невід'ємних значень.

На прикладі розглянемо методику пошуку опорного плану за методом штучного базису.

Приклад. Знайти розв'язок задачі лінійного програмування:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16, \\ x_1, \ldots, x_4 \geq 0. \end{cases}$$
$$z = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4$$

Розв'язування. Вводимо штучні невідомі w_1 *і* w_2

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 + w_1 = 18, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + w_2 = 16, \\ x_1, \ldots, x_4, w_1, w_2 \geq 0. \end{cases} \tag{6.6}$$

штучну форму

$$f = w_1 + w_2 = 34 - (7x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4)$$

і заповнюємо початкову таблицю

Номер ітерації	Номер Рядка	Базисні невідомі	Опорний розв'язок	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	f	34	7	-1	3	4
	1	w_1	18	4	-2	1	3
	2	w_2	16	3	1	2	1
	3	z	0	-2	1	-3	1

Зробимо декілька зауважень:

Зауваження 1. Щоб знайти опорний план, треба перевести штучні невідомі з базисних у вільні. З цією метою у методі штучного базису використовуємо редуковані таблиці, оскільки після переходу у вільні штучні невідомі нас вже не буде цікавити.

Зауваження 2. Нульовий рядок (рядок оцінок) заповнюємо за штучною формою. Його можна дістати формальним додаванням чисел відповідних стовпчиків системи обмежень.

Зауваження 3. Для того щоб у кінцевому підсумку основна оптимізуюча форма також була виражена через вільні невідомі, ми їй відводимо останній рядок у таблиці і виконуємо з ним ці самі перетворення, що і з іншими рядками.

Номер ітерації	Номер Рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	f	34	7	-1	2	4
	1	w_1	18	(4)	-2	1	3
	2	w_2	16	3	1	2	1
	3	z	0	-2	1	-3	1
II	0	f	5/2	0	5/2	5/4	-5/4
	1	x_1	9/2	1	-1/2	1/4	3/4
	2	w_2	5/2	0	(5/2)	5/4	-5/4
	3	z	9	0	0	-5/2	5/2
III	0	f	0	0	0	0	0
	1	x_1	5	1	0	1/2	1/2
	2	x_2	1	0	1	1/2	-1/2
	3	z	9	0	0	-5/2	5/2

У нульовому рядку другої ітерації немає вже додатних чисел, тому план $X^*(5,1,0,0,0,0,)$ є оптимальним для задачі (3), а план X=(5,1,0,0) - опорним для вихідної задачі. Тепер розв'язуємо вихідну задачу. Виписуємо ще раз таблицю другої ітерації, де у нульовому рядку будуть елементи форми z (3-й рядок таблиці). Результати операції подані у новій таблиці.

Номер ітерації	Номер Рядка	Базисні невідомі	Опорний план	x_1	x_2	x_3	x_4
I	0	z	9	0	0	-5/2	5/2
	1	x_1	5	1	0	1/2	1/2
	2	x_2	1	0	1	(1/2)	-1/2
II	0	z	14	0	5	0	0
	1	x_1	4	1	-1	0	1
	2	x_3	2	0	2	1	-1

План $X^* = (4,0,2,0)$ є оптимальним, $z_{\max} = 14$

Зауваження. Методом штучного базису можна окремо (без оптимізуючої форми) досліджувати систему обмежень на сумісність в області невід'ємних значень. Це доцільно робити в тих випадках, коли є деякі ознаки того, що система обмежень не може мати допустимих планів.

Контрольні запитання

1. Що називається опорним планом?
2. В чому полягає ідея симплексного методу?
3. Що таке канонічна форма задачі лінійного програмування?
4. Сформулюйте властивості симплексного – методу.
5. Сформулюйте критерій оптимальності ЗЛП за симплекс-таблицями.
6. Опишіть алгоритм роботи з симплекс – таблицями.
7. Що таке ключовий стовпець, ключовий рядок, ключовий елемент?
8. Що таке провідний рядок?
7. Як проводити перетворення симплекс – таблиці?

Список використаної і рекомендованої літератури

1. Методи оптимізації складних систем: навч. посіб. для студ. спец. «Комп'ютеризовані системи управління і автоматики» / І. В. Кузьмін [та ін.] ; Вінницький держ. технічний ун-т. — Вінниця: ВДТУ, 2003. — 165 с.

2. Глушик М.М., Копич І.М., Сороковський В.М. Математичне програмування: підручник. Львів: Новий Світ, 2014. – 280 с.

3. Зайченко Ю.П. Дослідження операцій. Підручник.-К.: Видавничий дім «Слово», 2006. –816с.

4. Методи оптимізації та дослідження операцій [Текст]: навч. посіб. / П. М. Мартинюк, О. Р. Мічута ; Нац. ун-т вод. госп-ва та природокористування. – Рівне: НУВГП, 2011. – 283 с.

5. Теорія оптимізації: навч. посіб. для студентів ВНЗ / О. І. Щепотьєв, А. В. Жильцов. – Київ: Компринт, 2017. – 241 с.

6. 4. Оптимізаційні методи та моделі: підручник / В. С. Григорків, М. В. Григорків ; Чернів. нац. ун-т ім. Юрія Федьковича. – Чернівці: Рута, 2016. – 400 с.

7. Основи теорії і методів оптимізації: навч. посібник для студ. мат. спец. вищих навч. закл. / М. І. Жалдак, Ю. В. Триус. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.

5. Ладієва Л.Р. Оптимізація систем керування. : Електронне мережне навчальне видання. Навчальний посібник. – 2020. – 192 с.

6. Ладієва Л.Р. Оптимізація технологічних процесів: Навчальний посібник. – К: ІВЦ «видавництво «Політехніка»», 2004. – 192с.

7. Sage EP, White C.S. Optimal systems control. 2d View all formats and editions – Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J, 2006. - 392p. . Tenth Edition –Pearson Education Limited publishers London, 2017.-843 p.

8. Ravindran A. Engineering Optimization Methods and Application. /A. Ravindran A., Ragsdell K.M., Reklaitis G.V. / - Publication John Willy and sons, Inc, NJ, 2006, 2nd ed.- 688p.

8. Mathematical optimization methods: manual for higher educational institutions / V. Klymenko, O. Akmaldinova. – K. : NAU-druk, 2009. – 196 p.

9. Methods and models of optimization: work book: an educational book / G. G. Shvachich [et al.] ; Alfred Nobel univ., Dnipropetrovs'k. – Dnipropetrovs'k: Alfred Nobel univ., Dnipropetrovs'k, 2012. – 120 p.

10. Optimization theory / H. T. Jongen [та ін.]. – Boston[etc.]: Kluwer academic publishers, 2004. – XI, 443 p.: fig. – Бібліогр.: p. 429–443.